NOTE STOR.

CONGRÈS SCIENTIFIQUE D'ANGERS 1895

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DU SON

PAR MAURICE COUETTE

DOCTEUR ÈS SCIENCES

PROFESSEUR DE PHYSIQUE AUX FACULTÉS CATHOLIQUES D'ANGERS

ANGERS

GERMAIN & G. GRASSIN, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

40, rue du Cornet et rue Saint-Laud

1895

534.1
C83r
REMOTE STORAGE

RÉFLEXION ET RÉFRACTION DU SON

1. — La présente note a pour objet l'étude théorique de la réflexion et de la réfraction des ondes planes à vibrations longitudinales et, en particulier, la détermination des lois suivant lesquelles le mouvement se partage entre les ondes réfléchie et réfractée. Les résultats qu'elle contient ne se prêtent guère aux vérifications expérimentales, ni aux applications pratiques. Mais notre travail nous a paru présenter un assez grand intérêt d'ordre pédagogique, en préparant l'esprit aux théories plus difficiles de l'optique, par la considération d'un cas plus simple, dans lequel les propriétés mécaniques des milieux vibrants n'ont rien d'hypothétique. Je me suis astreint à mener de front l'intuition physique des phénomènes avec le développement du calcul. S'il ne s'agissait que d'établir des formules, on pourrait suivre une voie analytique beaucoup plus rapide, et, si l'on veut, plus élégante, en formant, dès le début, l'expression du potentiel des vitesses pour chacun des deux milieux, et en faisant, par l'emploi des imaginaires, rentrer dans une même forme exponentielle, l'expression des ondes persistantes et celle des mouvements amortis.

2. — *Incidence normale.* — Soient deux milieux élastiques différents A et B, constituant deux cylindres de même base, en contact par une section droite MN. L'onde incidente, arrivant du milieu A, donne naissance à une onde réfléchie dans le même milieu et à une onde pro-

55262

pagée dans le milieu B. Nous admettons provisoirement cette proposition dont la vérité se trouvera démontrée par la suite. Deux conditions, d'une nécessité évidente, doivent être remplies à la surface de séparation MN : 1° Continuité des élongations (ou des vitesses) ; 2° Continuité des pressions.

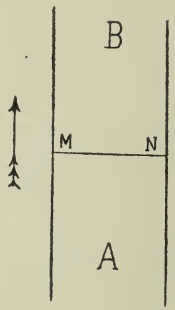

Fig. 1

3. — Convenons de prendre dans chaque onde pour direction positive de la vitesse vibratoire celle de la propagation. Soient u, u', u'' les vitesses vibratoires respectives dans les ondes incidente, réfléchie et réfractée, au voisinage immédiat de MN et à un même instant quelconque. L'interférence des deux premières ondes établit dans le milieu A, au contact de MN, la vitesse résultante $u-u'$; la vitesse dans B est simplement u''. La condition de continuité des vitesses est donc :

$$u - u' = u'' \qquad (1)$$

4. — Soient a et b les vitesses de propagation dans A et dans B. Les condensations respectives dans les trois ondes au contact de MN sont : $\frac{u}{a}$, $\frac{u'}{a}$, $\frac{u''}{b}$. Les deux premières, relatives au même milieu A, s'ajoutent, et la condensation résultante y est : $\frac{u+u'}{a}$. Soient E_A et E_B les coefficients d'élascité des deux milieux ; la pression dans

A au contact de MN est : $\frac{E_A}{a}(u+u')$; la pression dans B est de même : $\frac{E_B}{b}u''$. La condition de continuité des pressions est donc :

$$\frac{E_A}{a}(u+u') = \frac{E_B}{b}u'' \qquad (2)$$

Or la formule de *Newton* donne :

$$a = \sqrt{\frac{E_A}{\rho_A}}$$

ρ_A étant la masse spécifique de A.

Nous poserons :

$$m_{AB} = \frac{E_A}{a} : \frac{E_B}{b} = \frac{\sqrt{E_A \rho_A}}{\sqrt{E_B \rho_B}} ;$$

Nous appellerons le rapport m_{AB} *indice de partage*, et nous le désignerons simplement par m, quand il n'y aura pas de confusion à craindre. L'équation (2) devient ainsi :

$$m(u+u') = u'' \qquad (3)$$

et en combinant (1) et (3), on a :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u' = \frac{1-m}{1+m}u & (4) \\ u'' = \frac{2m}{1+m}u & (5) \end{array} \right.$$

5. — Comptons, dans le présent paragraphe, positivement toutes les grandeurs dans le sens A ⇸ B, prenons, dans le plan MN, l'origine des abscisses x. Donnons-nous arbitrairement la distribution des vitesses dans l'onde incidente :

$$u = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

Afin de satisfaire à la condition (4) pour $x = o$, et quel que soit t, nous devrons prendre pour l'onde réfléchie

$$u_1 = (-u') = -\frac{1-m}{1+m}\varphi\left(t + \frac{x}{a}\right)$$

et alors la vitesse résultante en un point quelconque du milieu A sera :

$$U = u + u_1 = \varphi\left(t - \frac{x}{a}\right) - \frac{1-m}{1+m}\varphi\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (6)$$

De même, afin de satisfaire à la condition (5) pour $x = o$ et quel que soit t, nous devrons donner à la vitesse dans l'onde propagée, l'expression :

$$u'' = \frac{2m}{1+m}\varphi\left(t - \frac{x}{b}\right) \quad (7)$$

Les expressions (6) et (7) satisfont à la fois aux équations différentielles posées pour chacun des deux milieux, et aux conditions qui s'imposent à leur surface de séparation; donc, elles représentent exactement le mouvement du système, ce qui justifie notre point de départ.

6. — Tirons maintenant les conséquences des formules (4) et (5). Le coefficient m est essentiellement positif; donc, d'après la formule (5), au voisinage immédiat de la surface de séparation, la vitesse vibratoire dans l'onde propagée est toujours de même sens que la vitesse dans l'onde incidente. Elle est plus grande que cette dernière quand $m > 1$; en même temps, d'après la formule (4), la vitesse dans l'onde réfléchie est de *signe* contraire, et, par suite de nos conventions, de *sens* identique à celui de la vitesse dans l'onde incidente. On arrive à des conclusions opposées, si $m < 1$. En valeur absolue, u' est toujours plus petite que u ; mais u'' peut être plus grande ou plus petite que u, suivant que $m > 1$, ou que $m < 1$.

7. — Pour rendre l'expression de ces résultats plus frappante, nous proposons d'appeler *résistance* d'un milieu la grandeur qui a pour expression $R = \sqrt{E\rho}$. Alors $m > 1$ quand le milieu A est plus résistant que le milieu B ; c'est alors que la réflexion se fait sans chan-

gement de sens dans la vitesse ; elle se fait avec changement de sens, quand le milieu A est moins résistant que le milieu B.

Quand les résistances des deux milieux sont égales, on a : $m = 1$, et, par suite :

$$u' = o \qquad\qquad u'' = u \quad ;$$

il n'y a pas d'onde réfléchie, l'onde incidente passe sans altération dans le second milieu.

8. — Examinons comment l'énergie de l'onde incidente se partage entre les ondes réfléchie et propagée. Pour évaluer l'énergie transportée par une onde plane, nous considérerons le milieu où elle se propage comme séparé en deux parties par le plan qui contient les molécules dont l'abscisse d'équilibre est x. L'énergie qui passe, dans le sens de la propagation, de la première partie du milieu à la seconde, pendant un intervalle de temps déterminé, est égale au travail accompli pendant ce temps par la pression qui s'exerce de la première partie sur la seconde à travers le plan de séparation. Soit p cette pression au temps t par unité de surface ; pendant le temps indéfiniment petit dt, le déplacement du plan est udt, le travail élémentaire par unité de surface, ou, ce qui est la même chose, l'énergie qui traverse l'unité de surface pendant le temps dt, est donc :

$$dW = pudt$$

Mais, puisque la condensation est égale à $\frac{u}{a}$, on a :

$$p = E_A \frac{u}{a}$$

et par suite :

$$dW = \frac{E_A}{a} u^2 dt = R_A u^2 dt$$

De l'époque t_0 à l'époque t_1, l'énergie totale qui traverse l'unité de surface est donc :

$$W = R_A \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt \qquad (8)$$

9. — Attribuons cette expression (8) à l'énergie qui, du fait de l'onde incidente, traverse un plan situé dans A à une distance indéfiniment petite de MN. L'énergie qui, du fait de l'onde réfléchie, traverse le même plan, en sens contraire, pendant le même intervalle de temps, sera :

$$W' = R_A \int_{t_0}^{t_1} u'^2 dt = R_A \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt = \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} W \quad (9)$$

De même, l'énergie que l'onde propagée fait passer, pendant le même intervalle de temps, à travers un plan situé dans B, et indéfiniment voisin de MN, est :

$$W'' = R_B \int_{t_0}^{t_1} u''^2 dt = R_B \frac{4m^2}{(1+m)^2} \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt =$$

$$= \frac{R_B}{R_A} \frac{4m^2}{(m+1)^2} W = \frac{4m}{(1+m)^2} W \qquad (10)$$

Comme vérification : $W' + W'' = W$.

Si les ondes sont périodiques, et, si on prend l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ égal à leur période, les énergies W, W' et W'' sont les *intensités*.

10. — D'après leur définition même, les indices de partage satisfont aux deux relations, bien connues pour les indices de réfraction,

$$m_{BA} = \frac{1}{m_{AB}} \qquad m_{BC} = \frac{m_{AC}}{m_{AB}}$$

D'autre part, les valeurs de W' et de W'', données par les formules (9) et (10) ne changent pas, quand on rem-

place m par $\frac{1}{m}$. Donc *pour un couple donné de milieux, la loi de partage de l'énergie entre les ondes réfléchie et réfractée est indépendante du sens de la propagation de l'onde incidente.*

Il n'en est pas de même pour les vitesses vibratoires.

11. — *Exemples numériqnes.* — 1° Prenons pour premier milieu l'hydrogène A, pour second l'oxygène B; tous deux dans les mêmes conditions de température et de pression. Alors le coefficient d'élasticité est le même pour les deux milieux, et on a :

$$m_{AB} = \sqrt{\frac{\rho_A}{\rho_B}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

$$u' = \frac{3}{5}\,u \qquad u'' = \frac{2}{5}\,u$$

$$W' = \frac{9}{25}\,W \qquad W'' = \frac{16}{25}\,W$$

2° Conservons les mêmes milieux, mais renversons le sens de la propagation :

$$m_{BA} = \frac{1}{m_{AB}} = 4$$

$$u' = -\frac{3}{5}\,u \qquad u'' = \frac{8}{5}\,u$$

$$W' = \frac{9}{25}\,W \qquad W'' = \frac{16}{25}\,W$$

3° L'eau A et le sulfure de carbone B, à la température de 14°, nous fournissent un cas où l'onde réfléchie manque presque complètement, les résistances des deux milieux étant très voisines l'une de l'autre. En effet, on a, d'après les données que nous avons prises dans le traité de physique de *MM. Jamin et Bouty* (μ désigne le coefficient de compressibilité) :

$$\frac{\rho_B}{\rho_A} = 1{,}273 \qquad \frac{E_A}{E_B} = \frac{\mu_B}{\mu_A} = 1{,}380$$

$$m_{AB} = \frac{R_A}{R_B} = \sqrt{\frac{E_A \rho_A}{E_B \rho_B}} = \sqrt{\frac{1,380}{1,273}} = 1,041$$

$$u' = -0,020\, u \qquad u'' = 1,020\, u$$

$$W' = 0,0004\, W \qquad W'' = 0,9996\, W$$

Ainsi l'onde passe à peu près sans altération de l'eau dans le sulfure de carbone, malgré la grande différence des vitesses de propagation, qui sont à 14° : 1.482 mètres par seconde pour l'eau et 1.120 mètres par seconde pour le sulfure de carbone.

4° Remarquons enfin les deux cas extrêmes $m = o$ et $m = \infty$. Le premier serait réalisé dans un tuyau plein d'air et fermé par un fond rigoureusement fixe; le second, à l'extrémité d'une verge solide placée dans le vide. Dans les deux cas $u'' = o$, et aussi $W'' = o$; il n'y a donc pas d'onde propagée dans le second milieu. En chacun des points de l'onde réfléchie, la vitesse a toujours la même valeur absolue qu'au point homologue de l'onde incidente; elle a le même sens si $m = \infty$, car alors $u' = -u$, et le sens contraire si $m = o$, ce qui donne $u' = u$.

12. — *Incidence oblique.* — Jusqu'ici nous n'avons pas eu besoin de préciser l'état physique des milieux; car les vibrations longitudinales étaient seules possibles dans les conditions où nous étions placés. Maintenant, pour éviter la complication qu'introduiraient les vibrations transversales, nous restreindrons expressément notre étude au cas où les deux milieux sont fluides. Nous les supposerons séparés par un plan et indéfinis dans tous les autres sens; enfin, nous n'y considérerons que des ondes planes.

Nous admettrons qu'une onde plane incidente donne naissance à une onde plane réfléchie et à une onde plane réfractée; et, de plus, que par l'intersection d'un plan d'égale

vitesse de l'onde incidente avec le plan de séparation des milieux passent un plan d'égale vitesse de l'onde réfléchie et un plan d'égale vitesse de l'onde réfractée. Par conséquent *(Fig. 2)*, si d'un point O du plan de séparation MN

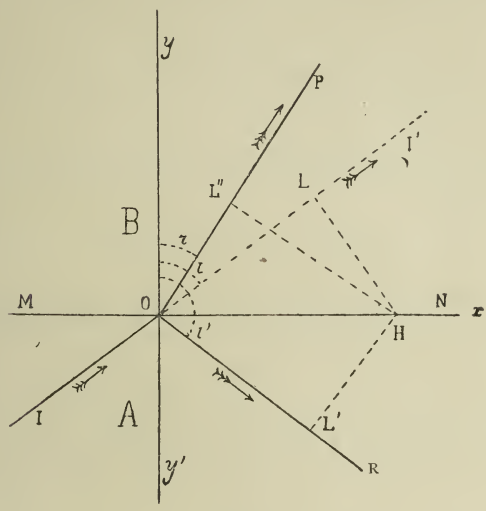

Fig. 2

on mène : 1° la normale Oy à ce plan ; 2° la normale IOI' aux plans d'égale vitesse de l'onde incidente ; 3° la normale OR aux plans d'égale vitesse de l'onde réfléchie ; 4° la normale OP aux plans d'égale vitesse de l'onde réfractée, les quatre droite Oy, OI, OR, OP sont dans un même plan. C'est ce plan que nous prenons pour plan de la figure.

13. — Prenons deux axes rectangulaires : Oy, normale à MN dirigé de A vers B, Ox intersection de MN avec le plan de la figure.

Soit *i l'angle d'incidence*, c'est-à-dire l'angle de la direction de propagation OI' du rayon incident IO avec la

normale Oy ; — i' l'angle yOR, que fait le rayon réfléchi OR avec Oy ; — r *l'angle de réfraction* yOP.

Soient encore u, u', u'' les vitesses moléculaires apportées par les trois ondes au point O, et comptées positivement suivant les directions respectives de propagation.

14. — Il y a deux conditions à remplir tout le long de la surface MN :

1° Continuité des composantes normales de la vitesse, ce qui donne :

$$u \cos i + u' \cos i' = u'' \cos r \qquad (11)$$

2° Continuité des pressions, exprimée par l'équation :

$$E_A \frac{u}{a} + E_A \frac{u'}{a} = E_B \frac{u''}{b}$$

ou, avec la notation précédemment introduite (4),

$$m\,(u + u') = u'' \qquad (12)$$

Nous ne nous imposons pas la condition de continuité des composantes tangentielles qui serait :

$$u \sin i + u' \sin i' = u'' \sin r$$

parce que nous considérons les deux milieux comme pouvant glisser sans frottement l'un sur l'autre.

Des deux équations (11) et (12) on tire :

$$u' = k'u \qquad u'' = k''u \qquad (13)$$

k' et k'' désignent des coefficients indépendants du temps et constants en tous points du plan MN.

15. — Alors, si au point O on a $u = \varphi\,(t)$,

on aura aussi : $u' = k'\,\varphi\,(t)$

et : $u'' = k''\,\varphi\,(t)$

Et en un point quelconque H pour lequel OH $= x$, on aura :

$$u = \varphi\left(t - \frac{\mathrm{OL}}{a}\right) = \varphi\left(t - \frac{x \sin i}{a}\right)$$

$$u' = k'\varphi\left(t - \frac{\mathrm{OL}'}{a}\right) = k'\varphi\left(t - \frac{x \sin i'}{a}\right)$$

$$u'' = k''\varphi\left(t - \frac{\mathrm{OL}''}{b}\right) = k''\varphi\left(t - \frac{x \sin r}{b}\right)$$

Pour que les relations (13) subsistent quel que soit x, il faut que :

$$\frac{\sin i}{a} = \frac{\sin i'}{a} = \frac{\sin r}{b}$$

Donc : 1° l'angle i', obtus par hypothèse, est le supplément de l'angle aigu i ; en d'autres termes, *l'angle de réflexion y'OR est égal à l'angle d'incidence y'OI.*

2° *Il y a un rapport constant entre le sinus de l'angle d'incidence i et le sinus de l'angle de réfraction r.*

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{a}{b} = n_{\mathrm{AB}} \qquad (14)$$

Ce rapport est égal à celui des vitesses de propagation, nous le désignerons par n_{AB} (ou simplement n), et nous l'appellerons, suivant l'usage, *indice de réfraction.*

16. — La relation $i' = \pi - i$

simplifie l'équation (11) qui devient :

$$(u - u') \cos i = u'' \cos r \qquad (15)$$

En combinant alors (12) et (15), on trouve :

$$u' = \frac{\cos i - m \cos r}{\cos i + m \cos r}\, u \qquad (16)$$

$$u'' = \frac{2m \cos i}{\cos i + m \cos r}\, u \qquad (17)$$

17. — Considérons *(Fig. 3)* les faisceaux incident SS'II', réfléchi II'RR' et réfracté II'QQ', limités par une même aire II' = ω prise sur le plan MN. D'un point O quelconque de ce plan, menons des plans OA, OB, OC respective-

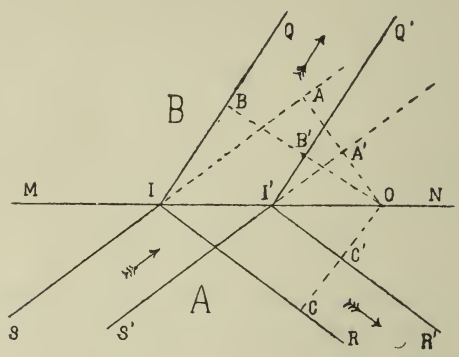

Fig. 3

ment perpendiculaires aux trois faisceaux. En chacun des points des deux sections droites, BB', CC' les vitesses moléculaires dans les ondes réfléchie et réfractée ont les mêmes valeurs u' et u'' qu'au point O; et si le premier milieu A se continuait dans la région réellement occupée par le second B, la vitesse moléculaire apportée par l'onde incidente en chaque point de la section AA' aurait aussi la même valeur u qu'au point o. Entre u, u' et u'', nous avons les relations (16) et (17).

18. — Désignons par W, W', W'' les énergies qui traversent (ou traverseraient) chacune des sections AA', BB', CC' entre les instants t_0 et t_1. Nous aurons :

$$W = R_A \times \text{aire } AA' \times \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt = R_A \omega \cos i \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt$$

$$W' = R_A \omega \cos i \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt = R_A \omega \cos i \frac{(\cos i - m \cos r)^2}{(\cos i + m \cos r)^2} \int_{t_0}^{t} u^2 dt$$

d'où :

$$W' = \frac{(\cos i - m \cos r)^2}{(\cos i + m \cos r)^2} W \qquad (18)$$

De même :

$$W'' = R_B \omega \cos r \int_{t_0}^{t_1} u''^2 dt = R_B \omega \cos r \frac{4m^2 \cos^2 i}{(\cos i + m \cos r)^2} \int_{t_0}^{t_1} u^2 dt$$

d'où :

$$W'' = \frac{R_B}{R_A} \frac{\cos r}{\cos i} \frac{4m^2 \cos^2 i}{(\cos i + m \cos r)^2} W$$

ou enfin :

$$W'' = \frac{4m \cos i \cos r}{(\cos i + m \cos r)^2} W \qquad (19)$$

et, comme on devait s'y attendre, $W = W' + W''$.

19. — Si, au lieu de considérer les énergies W, W', W'' rapportées à une même aire ω du plan MN, nous calculions les énergies W_1, W'_1, W''_1 qui traversent (ou traverseraient) chaque unité de surface des plans OA, OB, OC respectivement normaux aux trois faisceaux, nous aurions :

$$W_1 = \frac{W}{\omega \cos i} \qquad W'_1 = \frac{W'}{\omega \cos i} \qquad W''_1 = \frac{W''}{\omega \cos r}$$

et, par suite :

$$W'_1 = \frac{(\cos i - m \cos r)^2}{(\cos i + m \cos r)^2} W_1 \qquad (20)$$

$$W''_1 = \frac{4m^2 \cos^2 i}{(\cos i + m \cos r)^2} W_1 \qquad (21)$$

et alors il ne serait pas exact d'écrire : $W_1 = W'_1 + W''_1$.

20. — Dans le cas des ondes périodiques et si on prend l'intervalle de temps $t_1 - t_0$ égal à la période, les quantités W, W′, W″ deviennent les *intensités totales* des faisceaux limités par l'aire ω ; les quantités W_1, W'_1, W''_1 sont les *intensités* de ces faisceaux *par unité de surface* de leurs sections droites.

21. — *Retour inverse des ondes.* — Mettons l'onde incidente dans le milieu B, et donnons au nouvel angle d'incidence la valeur r de l'ancien angle de réfraction. Il faudra remplacer n_{AB} par $n_{BA} = \frac{1}{n_{AB}}$ et, par suite, le nouvel angle de réfraction sera égal à l'ancien angle d'incidence i. Enfin m_{AB} devra être remplacé par $m_{BA} = \frac{1}{m_{AB}}$. Or, on reconnaît facilement que les expressions (18) et (19) ne sont pas modifiées quand on y remplace simultanément i par r, r par i et m par $\frac{1}{m}$. Donc, *la loi du partage de l'énergie est indépendante de l'ordre des milieux.*

22. — *Réfraction totale.* — D'après la formule (16), $u' = o$ et, par conséquent, il n'y a pas d'onde réfléchie, lorsque :

$$\cos i - m \cos r = o \qquad (26)$$

On a d'ailleurs toujours :

$$\sin i - n \sin r = o \qquad (27)$$

De ces deux équations, on tire :

$$tg\, i = \frac{n}{m} \sqrt{\frac{1 - m^2}{n^2 - 1}} \qquad (28)$$

$$tg\, r = \sqrt{\frac{1 - m^2}{n^2 - 1}} \qquad (29)$$

Pour que ces valeurs soient réelles, il faut que les différences $1 - m^2$ et $n^2 - 1$ soient de même signe ; les rapports

$$m^2_{AB} = \frac{E_A \rho_A}{E_B \rho_B} \qquad \text{et} \qquad n^2_{AB} = \frac{E_A \rho_B}{E_B \rho_A}$$

doivent donc être l'un plus grand, l'autre plus petit que 1 ; d'où nous concluons que : *pour que l'onde réfléchie puisse manquer, le rapport des élasticités des deux milieux doit être compris entre les rapports direct et inverse de leurs densités.*

Quand cette condition est remplie, il existe une valeur unique de l'angle i, pour laquelle cette onde manque ; cette valeur est donnée par la formule (28), et l'angle de réfraction correspondant r, par la formule (29).

Ce phénomène, qu'on peut appeler la *réfraction totale*, a son analogue en optique dans ce qui se produit quand un rayon polarisé dans un plan perpendiculaire au plan d'incidence, rencontre le miroir sous l'angle de polarisation totale : il n'y a pas de rayon réfléchi.

23. — L'analogie se poursuit en ce que le phénomène se présente pour le même couple de directions i et r, quel que soit l'ordre des milieux. En effet, si on suppose que les ondes passent de B en A, il faut, dans la formule (23), remplacer m et n par $\frac{1}{m}$ et $\frac{1}{n}$, ce qui donne :

$$tg\, i = \sqrt{\frac{1 - m^2}{n^2 - 1}}$$

il faut donc prendre pour nouvel angle d'incidence l'ancien angle de réfraction. Ce résultat est d'ailleurs un cas particulier du fait général que la loi du partage de l'énergie est indépendante de l'ordre des milieux.

24. — Enfin l'analogie présente un trait de plus quand les deux milieux sont des gaz parfaits, pris dans les mêmes conditions de température et de pression. Alors les élasticités sont les mêmes, et on a, par conséquent :

$$m = \frac{1}{n}$$

L'angle de *réfraction totale* est donc donné par la formule :

$$tg\, i = n$$

c'est la loi de *Brewster* pour l'angle de polarisation.

25. — *Réflexion totale.* — Lorsque la vitesse de propagation dans le milieu A est plus petite que dans le milieu B, l'indice de réfraction n_{AB} est plus petit que 1. Appelons alors *angle limite* l'angle λ donné par la formule :

$$\sin \lambda = n_{AB}$$

Si on fait $i = \lambda$, on a $r = \frac{\pi}{2}$
et alors les équations (16), (17), (18) et (19) donnent :

$$u' = u \qquad u'' = 2mu$$
$$W' = W \qquad W'' = 0$$

Donc, pour que les conditions à la surface MN, d'où nous avons déduit ces équations, soient satisfaites dans ce cas particulier, il faut que dans le milieu B se propage une onde dans une direction parallèle à la surface MN, et que dans cette onde la vitesse vibratoire soit $u'' = 2\,mu$. Il y a alors une onde réfléchie, animée de la même vitesse vibratoire ($u' = u$) que l'onde incidente, et transportant, par suite, la même énergie $W = W'$). A travers un élément quelconque ω de la surface de séparation, aucune énergie ne passe de A en B, puisque $W'' = o$; en effet, la section droite $\omega \cos r$ d'un faisceau réfracté limité au contour de ω est nulle ; d'ailleurs encore la composante normale de la vitesse vibratoire est nulle partout le long de MN, ce qui ne permet au milieu A d'exercer aucun travail sur le milieu B. On exprime ces diverses circonstances en disant qu'il y a *réflexion totale.*

26. — Pour $i > \lambda$, toutes les formules deviennent imaginaires, c'est-à-dire qu'il n'est plus possible de trouver

un système de trois ondes incidente, réfléchie et réfractée, capable de satisfaire aux conditions qui doivent être remplies à la surface de séparation des deux milieux.

La construction de Huygens et les lois géométriques qu'on peut en déduire conservent une signification pour la réflexion et n'en ont plus pour la réfraction. Il est donc naturel d'essayer de conserver l'onde réfléchie, et de supprimer l'onde réfractée ; mais il faudra remplacer celle-ci par quelque autre mouvement du milieu B, afin de satisfaire aux conditions relatives à la surface de séparation. Quel peut être ce mouvement de B ?

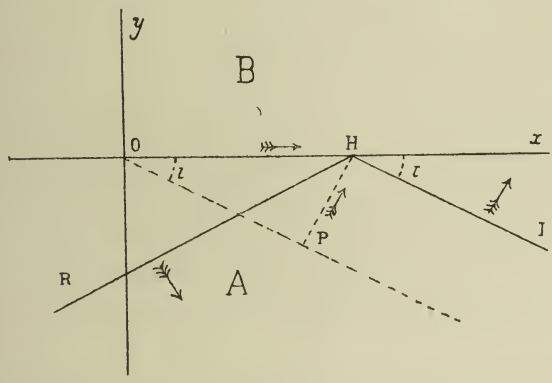

Fig. 4

27. — Considérons (*fig. 4*) l'onde plane incidente infiniment mince HI sur laquelle la vitesse moléculaire est u, et l'onde plane réfléchie infiniment mince H R qui en provient et sur laquelle la vitesse moléculaire est u'. Ces deux ondes se coupent constamment suivant une droite H perpendiculaire au plan de la figure et située dans le plan MN où elle se déplace dans la direction Ox avec la vitesse $\frac{OH}{t} = \frac{PH}{t \sin i} = \frac{a}{\sin i}$. La superposition des ondes incidente et réfléchie donne en tout point de la droite H une vitesse

résultante dont la composante parallèle à Oy est : $(u-u')\cos i$ et une condensation résultante : $\frac{u+u'}{a}$.

Dans le milieu B, il doit toujours y avoir aussi, le long de H, une composante de vitesse et une condensation égales à celles-là. Nous sommes ainsi conduits à attribuer au milieu B un mouvement se propageant dans le sens Ox avec la vitesse $\frac{a}{\sin i}$.

28. — Or, dans le cas où nous sommes, $i > \lambda$, et, par suite, $\frac{a}{\sin i} < b$. Par conséquent, le frémissement que les ondes du milieu A imposent au milieu B le long du plan de séparation, se disperse dans toutes les directions de B plus rapidement qu'il ne se déplace sur ce plan. L'amplitude des élongations diminue donc vraisemblablement à partir de ce plan vers l'intérieur de B. Cet amortissement doit être particulièrement notable quand les ondes incidentes sont périodiques, à cause des interférences entre les condensations positives et négatives reçues, par un point quelconque de B, des différents points de la surface de séparation. Il est possible enfin que rapidité de cet amortissement dépende de la période.

29. — Guidés par ces diverses considérations et nous rappelant que, d'après le théorème de Fourier, toute fonction peut être exprimée par une somme de termes périodiques, nous attribuerons au potentiel des vitesses dans le milieu B, la forme :

$$\psi = \Sigma\, M e^{-\mu y} \sin \frac{2\pi \sin i}{aT}\left(x - \frac{at}{\sin i}\right) \qquad (30)$$

Il reste à démontrer que cette forme est acceptable.

Elle doit d'abord satisfaire à l'équation bien connue :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = b^2 \Delta\psi \qquad (31)$$

Comme celle-ci est linéaire, il faut et il suffit que chaque terme de ψ y satisfasse séparément. Désignons par θ celui dont la période est T.

$$\theta = \mathrm{M}e^{-\mu y} \sin \frac{2\pi \sin i}{a\mathrm{T}}\left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\,\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} = -\frac{4\pi^2 \sin^2 i}{a^2\mathrm{T}^2}\,\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dy^2} = \mu^2\theta$$

En mettant les expressions des dérivées de θ à la place de celles de ψ dans (31), et supprimant le facteur commun θ, nous avons :

$$-\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2} = -\frac{4\pi^2}{\mathrm{T}^2}\,\frac{b^2 \sin^2 i}{a^2} + b^2\mu^2$$

La forme (30) satisfait donc à l'équation (31) pourvu qu'on prenne :

$$\mu = \frac{2\pi}{b\mathrm{T}}\sqrt{\frac{b^2 \sin^2 i}{a^2} - 1} = \frac{2\pi}{b\mathrm{T}}\sqrt{\frac{\sin^2 i}{n^2} - 1}$$

quantité toujours réelle dans le cas actuel ($i > \lambda$).

30. — Supposons un instant que ψ ne contienne qu'un seul terme θ. Alors la vitesse moléculaire a pour composante suivant Oy :

$$\frac{d\theta}{dy} = -\mu\mathrm{M}e^{-\mu y} \sin \frac{2\pi \sin i}{a\mathrm{T}}\left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

et la condensation est :

$$-\frac{1}{b^2}\,\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{b^2}\,\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\,\mathrm{M}e^{-\mu y} \cos \frac{2\pi \sin i}{a\mathrm{T}}\left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

Le long de la surface de séparation, il faut faire, dans ces expressions, $y = 0$, ce qui réduit à 1 le facteur exponentiel.

Alors, les conditions à la surface sont :

$$(u - u') \cos i = -\mu M \sin \frac{2\pi \sin i}{aT} \left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

pour les vitesses et

$$E_A \frac{u + u'}{a} = -\frac{E_B}{b^2} \frac{2\pi}{T} M e^{-\mu y} \cos \frac{2\pi \sin i}{aT} \left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

pour les pressions.

Cette dernière s'écrit avec la notation adoptée plus haut 4) :

$$m (u + u') = -\frac{2\pi}{bT} M e^{-\mu y} \cos \frac{2\pi \sin i}{aT} \left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

Ces conditions sont satisfaites par les valeurs suivantes de u et de u' :

$$u = -\frac{1}{2 \cos i} \mu M \sin \alpha - \frac{1}{2m} \frac{2\pi}{bT} M \cos \alpha$$

$$u' = +\frac{1}{2 \cos i} \mu M \sin \alpha - \frac{1}{2m} \frac{2\pi}{bT} M \cos \alpha$$

J'ai posé, pour abréger,

$$\alpha = \frac{2\pi \sin i}{aT} \left(x - \frac{at}{\sin i}\right)$$

Ces vitesses sont précisément celles que produiraient respectivement le long de la surface de séparation une onde incidente et une onde réfractée de même période T, se propageant avec la vitesse a, dans des directions faisant l'angle i avec la normale au plan de séparation.

La co-existence de ces deux ondes dans le milieu A avec le mouvement amorti ci-dessus attribué au milieu B satisfait donc à toutes les conditions du problème.

31. — La réflexion est *totale*, car en reprenant les notations adoptées ci-dessus (17), et en calculant l'intégrale définie pour une période T, on a :

$$W = R_A \omega \cos i \int_{t_0}^{t_0 + T} u^2 dt$$

$$W' = R_A \omega \cos i \int_{t_0}^{t_0 + T} u'^2 dt$$

et ces deux intégrales définies sont égales entre elles ; leur valeur commune est :

$$\frac{1}{4 \cos^2 i} \mu^2 M^2 + \frac{1}{4m^2} \frac{4\pi^2}{b^2 T^2} M^2$$

D'autre part, l'énergie transmise au second milieu, pendant une période T, à travers l'élément de surface ω (qu'il faut supposer infiniment petit, parce que les vitesses normales et les condensations varient d'un point à l'autre du plan de séparation), est :

$$W'' = -\frac{\omega E_B}{b^2} \int_{t_0}^{t_0 + T} \left(\frac{d\theta}{dy}\right)_0 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 dt = \text{constante} \times \int_{t_0}^{t_0 + T} \sin\alpha \cos\alpha . dt = 0$$

Cela veut dire physiquement que le milieu B, en se comprimant et se décomprimant au voisinage du milieu A, rend à celui-ci pendant une certaine phase du mouvement exactement autant de travail qu'il en reçoit pendant une autre phase.

32. — Il importe de remarquer la différence de phase δ introduite, ici comme en optique, par la réflexion totale, entre les vitesses u et u'. Je ne reproduirai pas le calcul, plutôt long que difficile, qui conduit à la formule :

$$tg\, \pi\delta = \frac{m}{\cos i} \sqrt{\frac{\sin^2 i}{n^2} - 1} \qquad (32)$$

δ varie donc de 0 à $\frac{1}{2}$, quand i varie de λ à $\frac{\pi}{2}$.

3 0112 072899062

Voici l'interprétation physique de cette différence de phase. Par suite des restitutions de travail que le milieu B fait au milieu A (31), le mouvement réfléchi dans A, en un point déterminé du plan de séparation et à un instant quelconque, dépend, non seulement du mouvement apporté en cet instant même à ce point par l'onde incidente, mais encore de celui qu'elle y a apporté pendant les instants précédents, et qui s'est emmagasiné provisoirement dans B.

33. — Tout ce que nous avons dit dans les trois derniers paragraphes pour les ondes périodiques, s'applique à des ondes quelconques, puisque le théorème de Fourier permet de les considérer comme résultant de la superposition d'ondes périodiques. Il y a donc encore réflexion totale. Mais la distribution des vitesses dans l'onde réfléchie n'est pas la même que dans l'onde incidente, à cause de la phase δ introduite dans chacun des termes de la série de Fourier. D'après la formule (32), la fraction de période δ ne dépend pas de T ; le retard absolu $T\delta$, est, au contraire, comme T, différent pour les différents termes. On ne peut donc pas identifier, par un changement d'origine du temps, l'expression de la vitesse dans l'onde réfléchie avec celle de la vitesse dans l'onde incidente.

Angers, imp. Germain et G. Grassin. — 1677-95.